

# Addomesticare l'infinito: *storia di qualche tentativo*



Simonetta Di Sieno

Venezia

14 aprile 2018

In questo breve, bellissimo canto del 1819, il poco più che ventenne Giacomo Leopardi (1798 -1837) esprime il rimando fra vicino, presente, limitato e l'infinito: per come lo "immagina" nel linguaggio della poesia.

La poesia, infatti, ha un modo particolare di esprimere quel che vuole, così come la matematica.

Il giovane Giacomo ama *questo* colle solitario e *questa* siepe (vicini, piccoli, adesso) ma, al di là, *interminati* spazi e *sovrumani* silenzi e *profondissima* quiete (lunghi, immensi aggettivi) *si finge* nel pensiero: immagina. "Fingere", in latino, vuol dire "modellare" "plasmare", attività concrete.

La mente, il pensiero possono non solo vedere o immaginare, ma addirittura plasmare "modelli", poetici modelli. [...]

L'immaginato ultimo orizzonte, il lontanissimo infinito è diventato vicino, come ciò che è qui, presente, reale. [...]

(Paola Gallo)

L'infinito

Attonire il cuore, l'infinito



Arnaldo Pomodoro  
Papyrus per Darmstadt, studio, 1988-89, bronzo, 90 x 200 x 80 cm  
(Foto Giorgio Bocchetti)

#### L'infinito

*Sempre caro mi fu quest'eremo colle,  
e questa siepe, che da tanta parte  
dell'ultimo orizzonte il guardo esclude:  
Ma sedendo e mirando, interminati  
spazi di là da quello, e sovrumani  
silenzi, e profondissima quiete  
io nel pensier mi fingo: ove per poco  
il cor non si spaura. E come il vento  
odo stormir tra queste piante, io quello  
infinito silenzio a questa voce  
vo comparando; e mi sovvien l'eterno,  
e le morte stagioni, e la presente  
e viva, e il suon di lei. Così tra questa  
immensità s'annega il pensier mio:  
e il naufragar m'è dolce in questo mare.*

Giacomo Leopardi

In questo breve, bellissimo canto del 1819, il poco più che ventenne Giacomo Leopardi (1798 -1837) esprime il rimando fra vicino, presente, limitato e l'infinito: per come lo "immagina" nel linguaggio della poesia.

La poesia, infatti, ha un modo particolare di esprimere quel che vuole, così come la matematica. "L'infinito" non è stato scritto "di getto", e se così ci può sembrare, superando qualche difficoltà per parole di quasi due secoli fa, il merito è di Leopardi, poeta grandissimo.

Il giovane Giacomo ama questo colle solitario e questa siepe (vicini, piccoli, adesso) ma, al di là, interminati spazi e sovrumani silenzi e profondissima quiete (lunghi, immensi aggettivi) si finge nel pensiero: immagina. "Fingere", in latino, vuol dire "modellare", "plasmare", attività concrete. La mente, il pensiero possono non solo vedere o immaginare, ma addirittura plasmare "modelli", poetici modelli. Essendo Leopardi, o "come" lui.

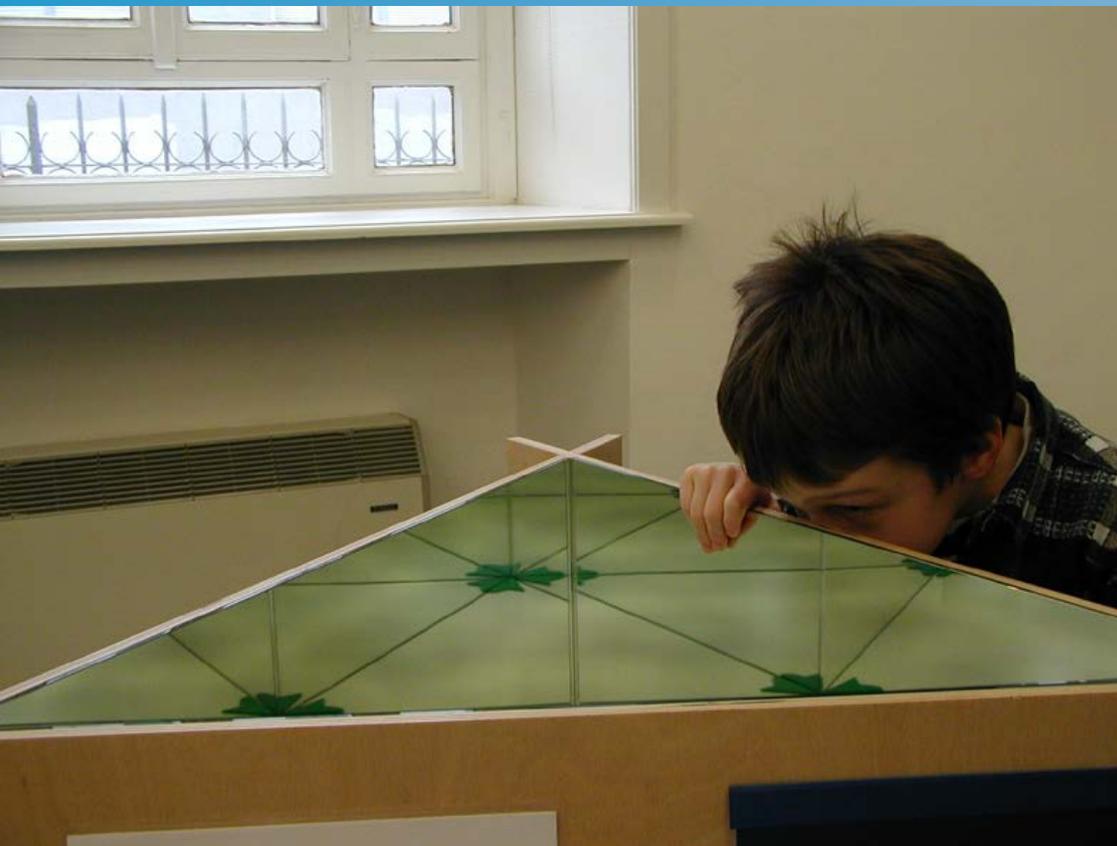
Ora Giacomo (insieme a noi) paragona il fruscio di queste piante, mosse da questo voce del vento, a quello infinito silenzio.

Certo, in tutto ciò, per poco il cor non si spaura, siamo smarriti tra piacere e spavento. Emozioni forti e comuni a tutti gli esseri umani. Ma, proprio negli ultimi versi della poesia, al termine di un percorso difficile, Giacomo dice che il suo pensiero s'annega in questo immenso. L'immaginato ultimo orizzonte, il lontanissimo infinito è diventato vicino, come ciò che è qui, presente, reale. Possiamo, infine, fare naufragio, sì, ma dolcemente. "E il naufragar m'è dolce in questo mare".

Non si tratta di una lirica religiosa: il tema dell'infinito ritorna molte volte in Leopardi, poeta infelice e coraggioso, che osa immaginare, dalla nostra vita umana precaria e destinata alla morte, orizzonti sconfinati, nel tempo e nello spazio.



il punto di fuga



... mi sento sperduto

senza pareti ...

Adattamento: l'infinito

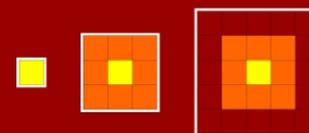


Supponete di avere delle belle piastrelle per pavimentare una stanza: se le piastrelle sono quadrate e di uguale dimensione, potete accostarle senza difficoltà lato contro lato e così ricoprire tutto il pavimento senza lasciare buchi.  
Ma se la stanza fosse quella senza pareti di una famosa canzone e il pavimento fosse infinito?

Nessun problema, potreste anche continuare "all'infinito".

Per i matematici, tassellazione è un ricoprimento infinito del piano con dei tasselli (le piastrelle) che non si sovrappongono e che non lasciano buchi. Naturalmente non si può costruire "per davvero" una tassellazione (fino all'infinito...), ma immaginarla non è difficile.

Potete, per esempio, immaginarvi di partire da un quadrato e di circondarlo con successivi "anelli" di quadrati, come nelle tre figure qui sotto.

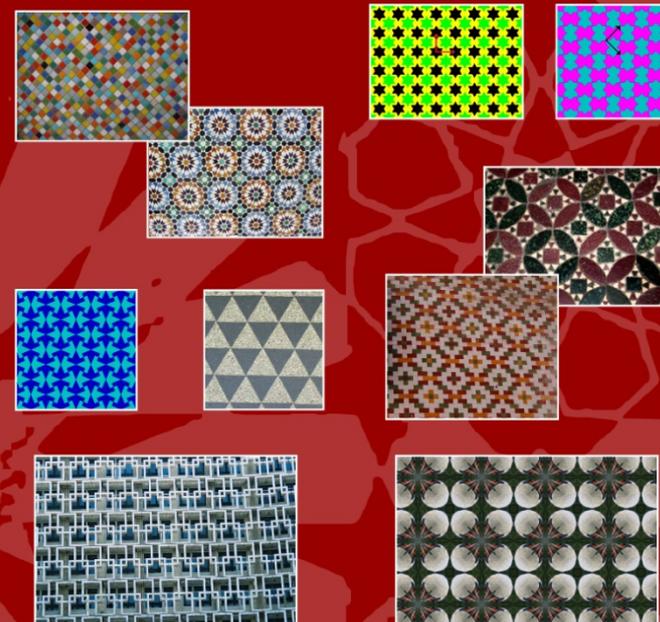


Oppure potete osservare che ogni traslazione corrispondente a un lato di un quadrato fa cadere uno dei tasselli su un tassello adiacente in un altro che gli è adiacente lungo un lato, e quindi "va bene" per costruire la tassellazione. E anche questo procedimento può essere continuato "all'infinito".

Per i matematici, una tassellazione come questa è periodica. Le traslazioni usate per costruirla a partire da un quadrato hanno la bella caratteristica che, applicate all'intera tassellazione, non la cambiano: ogni quadrato si sposta in un altro quadrato e la tassellazione nella sua globalità non cambia.

Ci sono tassellazioni periodiche che non sono costruite con quadrati: qui intorno ne vedete molte altre, costruite con poligoni diversi e anche con forme che non sono poligoni; naturalmente dovete sempre immaginare che i disegni continuano "all'infinito".

In alcuni casi abbiamo disegnato due frecce che mettono in evidenza le traslazioni che non mutano il disegno. Sapete identificare queste traslazioni anche nei casi in cui non sono messe in evidenza?





Quanti sono  
i granelli di sabbia?  
i fili d'erba?

Si possono contare?

Sono di più i fili d'erba  
o i granelli di sabbia?



## Il Re ladava e il bramino Lahur Sessa

Sessa mise davanti al Re una tavola divisa in sessantaquattro caselle di uguali dimensioni. Su di essa erano disposti due gruppi di pezzi, gli uni bianchi e gli altri neri. Le figure di questi pezzi erano allineate simmetricamente sulla scacchiera e vi erano strane regole che governavano i loro movimenti. (...)

Sessa disse di non volere alcuna ricompensa perché questa era la felicità di aver guarito il Re... Poi, per non essere scortese, chiese di essere pagato in chicchi di grano: «Mi darai un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza, otto per la quarta e così via, raddoppiando la quantità ad ogni casella fino alla sessantaquattresima e ultima.» (...)

Il re rise di questa richiesta, dicendogli che poteva avere qualunque cosa e invece si accontentava di pochi chicchi di grano.

(tratto da *L'uomo che sapeva contare* di Malba Tahan)

Che cosa  
vuol dire tantissimi?

I chicchi di riso della storia del  
bramino Lahur Sessa sono tanti o  
tantissimi?  
Riempiono questa stanza?



Sono  $1+2+\dots+2^{63} =$   
18.446.744.073.709.551.615

Chicchi di riso



- Quanti sono i numeri che servono per contare?
- E i numeri pari?
- I pari sono di più o di meno dei naturali?



*Nessuno riuscirà mai a mandarci via dal paradiso che Cantor ha creato per noi*

(David Hilbert, 1926)

Georg Cantor (1845 - 1918)

# Il paradiso di Cantor

Atmosfera Infinito



Quanti sono i giorni della terza settimana di dicembre? Sette. Quanti sono i giorni di dicembre? Trentuno. Sono di più i giorni della terza settimana o i giorni di dicembre? (Giorno di dicembre.) Non puoi credere che un insieme finito abbia tanti elementi quanti ne ha un suo sottoinsieme!

Quanti sono i numeri pari (0, 2, 4, 6, 8, ...) infiniti. Quanti sono i numeri naturali (0, 1, 2, 3, ...) infiniti. Sono di più numeri pari o numeri naturali? Sono tanti quanti. Possibile? Dov'è l'errore?

Non c'è errore. Se un insieme è infinito, allora esiste un suo sottoinsieme che ha tanti elementi quanti ne ha lui stesso.

Questa discussione degli insieme infiniti (dal 1866) è opera di uno dei più grandi matematici di sempre, il reaso Georg Cantor (1845 - 1918). Da allora, in matematica, il confronto con l'infinito ha incominciato a superare i dubbi, le incertezze, le ansie che lo avevano sempre segnato. La strada non è stata facile, le sorprese sono state grandi, ma nessuno riuscì mai a mandarci via dal paradiso che Cantor ha creato per noi. (David Hilbert, 1926)



Quante gocce d'acqua?



Quante spezie?



Quanti frusti?



Quanti dolci?



Quante parti?



Quanti grandi di sabbia?

All'Albergo Infinito le stanze sono tantissime. C'è la stanza 1, c'è la stanza 2, ... c'è la stanza 1.000.000 ... e per ogni numero naturale c'è la stanza con quel numero.

Un pomeriggio di sabato l'albergo Infinito è pieno. Alle sette di sera arriva un nuovo cliente. Il maître dell'albergo non si spaventa: fa spostare ogni cliente nella stanza con il numero successivo a quello che sta occupando (quello della stanza 1 va nella 2, quello della 2 va nella 3, e così via) e poi mette il nuovo cliente nella stanza n. 1 che si è liberata.

Brevi!

Alle otto di sera arrivano 10 persone nuove. Anche questa volta il maître dell'albergo non si spaventa: fa spostare ogni cliente nella stanza con il numero che viene 10 posti dopo quello che sta occupando (quello della stanza 1 va nella 11, quello della 2 va nella 12, e così via) e poi mette i nuovi clienti nelle stanze con i numeri 1, 2, 3, ... 10 che si sono liberate. Brevi!

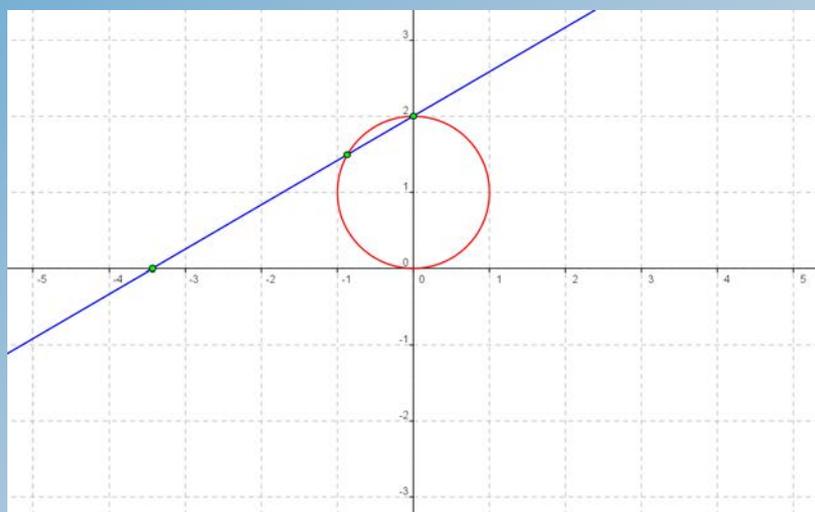
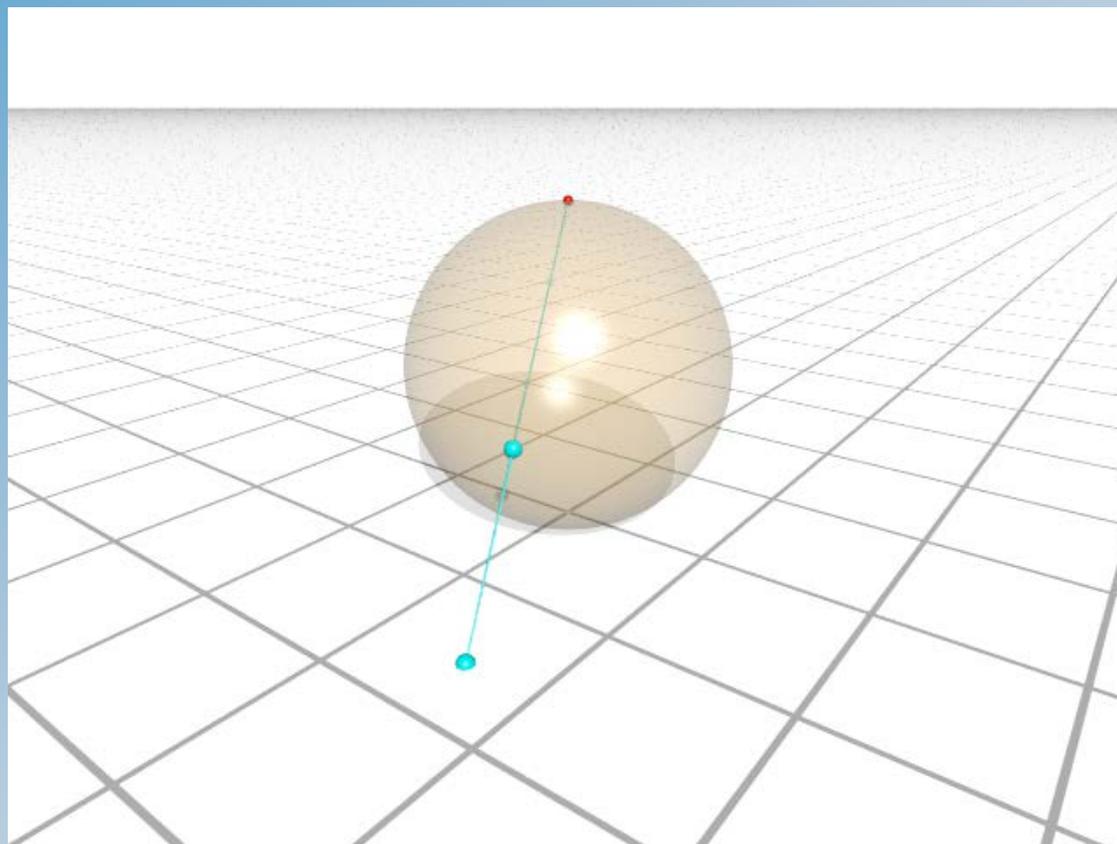
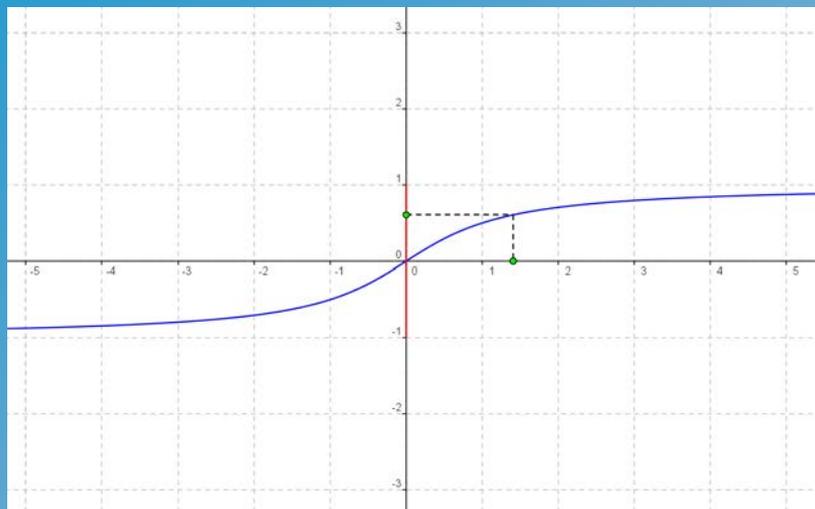
Ma a mezzanotte succede una tragedia: arriva un'infinità di clienti, tanti clienti quanti sono i numeri naturali: 1, 2, 3, 4, ...

Il maître non si perde d'animo neppure questa volta: fa spostare ogni cliente nella stanza con il numero doppio di quello della stanza che sta occupando (quello della stanza 1 va nella 2, quello della 2 va nella 4, ... quello della 1000 va nella 2000, e così via). Gli restano così libere tutte le stanze con i numeri dispari e può metterci i nuovi clienti.

Una bella sorpresa, una casa che non avrebbe potuto fare se... non avesse avuto clienti collaborativi, ma soprattutto se il suo albergo avesse avuto solo un numero finito di stanze.



$X_1$	=	0, 2 3 5 7 3 5 5 5 1 1 3 0 2 9 0 2 6 ...
$X_2$	=	0, 2 8 4 4 8 0 7 7 3 5 8 0 4 9 9 1 0 ...
$X_3$	=	0, 0 6 0 0 4 0 1 9 1 2 8 9 5 4 5 9 7 ...
$X_4$	=	0, 8 8 4 6 4 0 8 1 8 4 1 6 7 2 6 4 3 ...
$X_5$	=	0, 9 9 5 0 8 9 6 4 2 5 8 8 8 5 3 1 0 ...
$X_6$	=	0, 7 4 7 6 8 0 8 5 1 8 3 4 8 6 3 2 1 ...
$X_7$	=	0, 9 4 1 0 5 6 5 5 8 8 2 9 0 3 4 2 3 ...
$X_8$	=	0, 4 2 1 3 5 9 7 2 1 8 8 5 7 2 8 0 7 ...
$X_9$	=	0, 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
$X_{10}$	=	0, 8 4 2 4 0 5 2 0 7 8 1 5 3 9 9 6 2 ...
$X_{11}$	=	0, 6 1 2 0 0 8 8 2 8 0 9 7 7 3 5 3 8 ...
$X_{12}$	=	0, 3 1 0 9 7 3 9 7 8 0 9 6 9 5 8 7 6 ...
$X_{13}$	=	0, 1 1 3 7 1 2 3 1 5 5 0 7 4 5 0 9 5 ...
$X_{14}$	=	0, 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
$X_{15}$	=	0, 3 9 7 9 5 2 2 7 7 1 0 1 7 5 4 1 5 ...
$X_{16}$	=	0, 2 7 0 6 1 7 1 4 0 8 9 2 3 2 3 3 1 ...
$X_{17}$	=	0, 1 1 3 0 3 6 2 9 4 0 7 6 2 0 2 5 6 ...
...	...	... ..
$X$	=	0, ...



Lo vedo, ma non ci credo

**5/1/1874 Cantor a Dedekind** *Può una superficie (per esempio un quadrato, bordo compreso) essere messa in corrispondenza con una curva (per esempio un segmento di retta, estremi inclusi) in modo tale che ad ogni punto della superficie corrisponda un punto della curva e, viceversa, ad ogni punto della curva ne corrisponda uno della superficie?*

**25/6/1877 Cantor a Dedekind** *La maggior parte di coloro ai quali ho sottoposto tale questione si è molto meravigliata del fatto stesso che io abbia potuto porla, perché sembrava loro evidente che per la determinazione di un punto in una varietà a  $k$  dimensioni occorra sempre usare  $k$  coordinate indipendenti.*

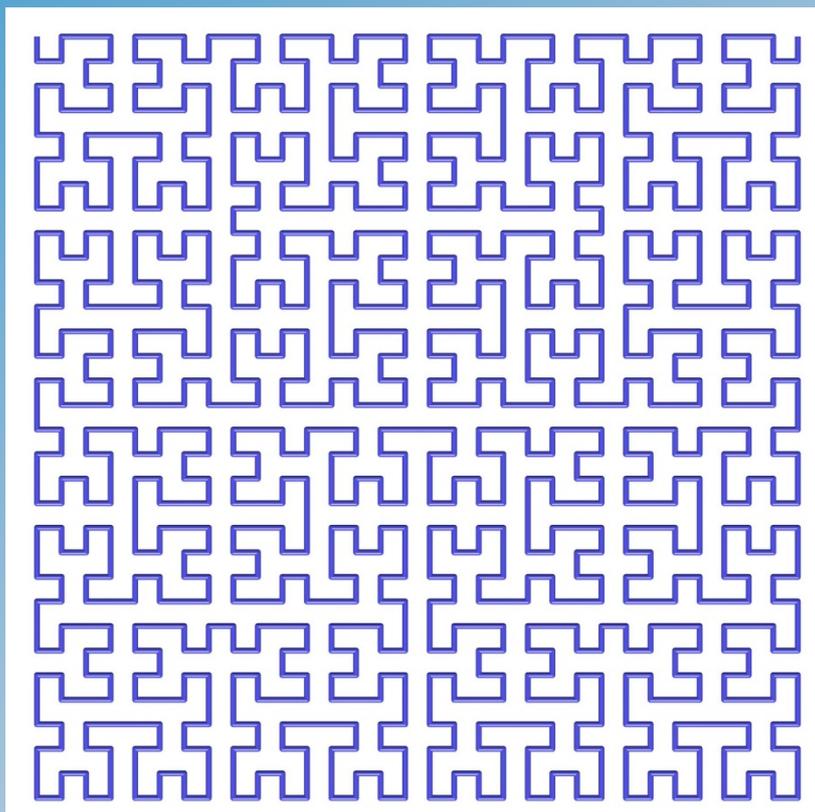
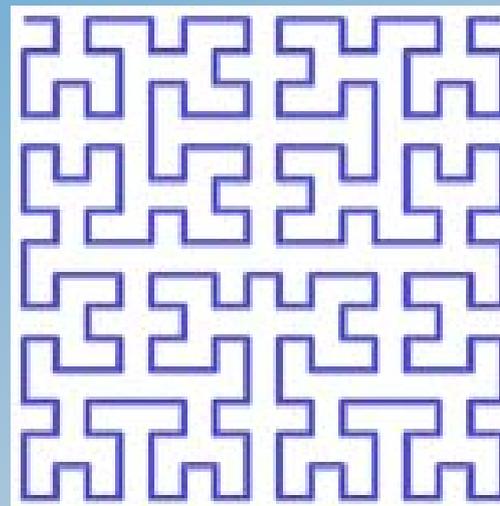
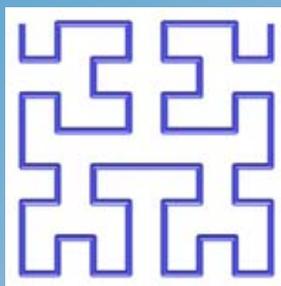
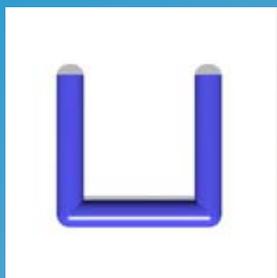
*Chi però coglieva in profondità il senso della questione era costretto a riconoscere che occorreva almeno dimostrarla [...]*

*Io facevo parte di coloro che ritenevano verosimile una risposta negativa fino al momento recentissimo in cui, con una successione molto complessa di pensieri, sono arrivato alla convinzione che la risposta sia affermativa, senza restrizione alcuna. Poco dopo trovai la dimostrazione che lei ha oggi sotto gli occhi.*

**29/6/1877 Cantor a Dedekind** *La prego di scusare la mia preoccupazione per quest'affare, se faccio così spesso appello alla sua bontà e condiscendenza. Ciò che le ho comunicato recentemente è così inatteso per me e così nuovo che non potrei, per dir così, arrivare a una certa tranquillità di spirito prima di ricevere, molto stimato amico, il suo giudizio sulla sua correttezza. Fin tanto che non mi avrà approvato, non posso che dire lo vedo, ma non ci credo.*

**2/7/1877 Dedekind a Cantor** *Ho esaminato ancora una volta la sua dimostrazione e non vi ho trovato lacune; sono convinto che il suo interessante teorema sia corretto e le faccio le mie felicitazioni.*

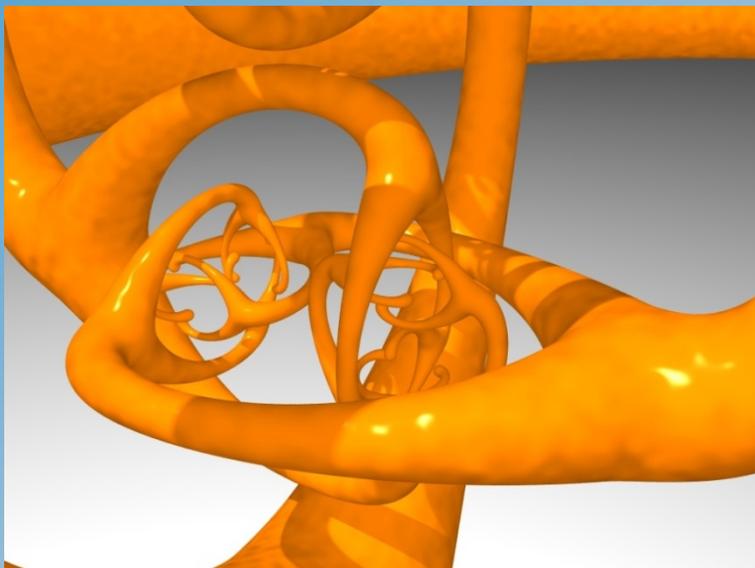
# La curva di Peano



continuando così all'infinito...

# continuando così all'infinito ....

## Che succede se deformati una sfera?



Continuando così all'infinito  
Adombrare l'infinito



Una circonferenza divide il piano in due "pezzi", uno dei quali è un disco.  
Una sfera divide lo spazio in due pezzi, uno dei quali è una palla (piena).

Se deformati la circonferenza in una curva, anche molto contorta e aggrovigliata, purché continui ad essere - come la circonferenza - una curva semplice (senza autointersezioni) e chiusa (che torna al punto di partenza), questa nuova curva continua a dividere il piano in due pezzi, uno limitato e l'altro illimitato, e quello limitato è deformabile in un disco.



Che cosa succede se deformati una sfera?  
Probabilmente molti sarebbero disposti a scommettere che anche il nuovo oggetto divide lo spazio in due pezzi, dei quali uno è deformabile in una palla piena.

È invece noi O, quantomeno, non è così il gattino che succede.  
La linea curva di Alexander (che si ottiene ripetendo all'infinito il procedimento illustrato in queste immagini) si può ottenere deformando una sfera, ma nessuno dei due pezzi in cui divide lo spazio è deformabile in una palla piena.

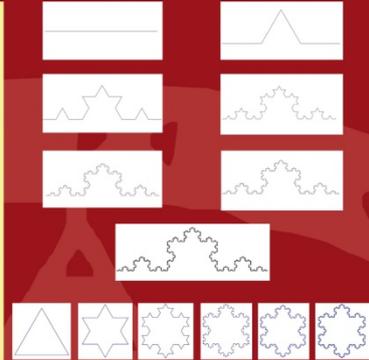
Osservando la natura vediamo che le montagne non sono dei coni, le nuvole non sono delle sfere, le coste non sono cerchi, ma sono degli oggetti geometricamente molto complessi...

Mandelbrot, 1975

Continuando così all'infinito

Automesolose e l'infinito

Supponiamo che un tratto di costa tracciato in maniera semplificata alla scala 1:1.000.000 sia semplicemente un triangolo equilatero.  
 Supponiamo che il nuovo dettaglio visibile sulla carta 3:1.000.000 corrisponda a sostituire il terzo centrale di ogni lato con un promontorio a forma di triangolo equilatero, si dà ottenere infine un'immagine formata da quattro segmenti uguali.  
 E che il nuovo dettaglio che compare a 9:1.000.000 consista nel sostituire ciascuno di questi quattro segmenti con quattro sotto-segmenti [...] più piccoli secondo un rapporto di un terzo, in modo da formare dei sotto-promontori.  
 Continuando così all'infinito, si perviene a una curva limite chiamata curva di Koch (1904).  
 È una celebre figura che Cesàro descrive (1905) in questi termini estetici: "È questa similitudine tra il tutto e le sue parti, perfino quelle infinitesime, che ci porta a considerarla alla stregua di una linea veramente meravigliosa fra tutte. Se fosse dotata di vita, non sarebbe possibile ammentarla senza sopprimerla al primo colpo, poiché in caso contrario rinascerrebbe incessantemente dalle profondità dei suoi triangoli, come la vita nell'universo".  
 (Mandelbrot, 1975)



Osservando la natura vediamo che le montagne non sono dei coni, le nuvole non sono delle sfere, le coste non sono cerchi, ma sono degli oggetti geometricamente molto complessi...  
 (Mandelbrot, 1975)

